イデアル完備化は左随伴である

久木田水生

Cate 研 2011 年 10 月 6 日

概要

本稿では，左随伴関手の例として，順序集合の圏から完備順序集合の圏へのイデアル完備化を紹介する．そのためにまず完備順序集合と連続写像の定義を与える．次にイデアル完備化を定義し，それが順序集合の圏から完備順序集合の圏への関手になっていることを確認する．最後にイデアル完備化が埋め込み関手に対する左随伴になっていることを示す．

1　完備順序集合

Definition 1.1 (有向部分集合)**.** P を順序集合とする．$M \subseteq P$ とする．X が P の**有向部分** *directed subset* であるのは，任意の $x, y \in X$ に対してある $z \in X$ が存在して $x \leq z, y \leq z$ が成り立つときである．このとき $X \subseteq_{dir} P$ と書く．

Definition 1.2 (完備順序集合，CPO)**.** 順序集合 D が**完備** *complete* あるいは**有向完備** *directed complete* であるのは，任意の空でない D の有向部分 X に対して，$X \neq \varnothing$ ならば X の上限が D の中に存在するときである．

以下では $X \subseteq_{dir} D$ に対して，X の上限を $\bigvee X$ によって表す．

完備順序集合 D が最小元を持つとき，それを $\bot_D$（あるいは単に $\bot$）によって表す．完備順序集合の定義に最小元を持つことを含める場合もある．そのとき，空である場合も含めて任意の有向部分が上限を持つことになる．というのも任意の完備順序集合 D に対して $\varnothing \subseteq_{dir} D$ であり，かつその上限は D の最小元だからである．

Example 1.3. A から B への部分関数の全体からなる集合 $[A \rightharpoonup B]$ に対して次のように順序を定義する：

$$f \leq_{[A \rightharpoonup B]} g \iff \forall a \in A. f(a) \text{ は未定義} \vee f(a) = g(a)$$

このとき $([A \rightharpoonup B], \leq_{[A \rightharpoonup B]})$ は完備順序集合である（練習問題）.

Definition 1.4 (単調写像)**.** 順序集合 P, Q に対して関数 $f : P \to Q$ が**単調** *monotonic* であるのは任意の $x, y \in P$ に対して $x \leq_P y$ ならば $f(x) \leq_Q f(y)$ が成り立つときである．

順序集合と単調写像は圏をなす．以後この圏を **Pos** と呼ぶ．

Definition 1.5 (連続写像)**.** 完備順序集合 D, E に対して関数 $f : D \to E$ が**連続** *continuous* であるのは，任意の $X \subseteq_{dir} D$ に対して $f[X] \subseteq_{dir} E$ かつ，$f(\bigvee X) = \bigvee f[X]$ が成り立つときである．

完備順序集合と連続写像は圏をなす．以後この圏を **CPO** と呼ぶ．

Exercise 1.6. 1. 連続写像は単調であることを示せ.

2. 完備順序集合と連続写像が圏をなすことを示せ.
3. $([A \rightharpoonup B], \leq_{[A \rightharpoonup B]})$ が完備順序集合であることを示せ.

Exercise 1.7. 完備順序集合 D に対して以下の条件を満たす $U \subseteq D$ の全体を $S(D)$ によって表す.

(i) $a \in U, b \in D, a \leq b \Rightarrow b \in U$

(ii) $X \subseteq_{dir} D, \bigvee X \in U \Rightarrow X \cap U \neq \varnothing$.

このとき以下を示せ.

1. $S(D)$ は開集合系の条件[*1] を満たす（この開集合系によって定まる位相は D 上の**スコット位相**と呼ばれる）.
2. 完備順序集合をスコット位相に関する位相空間と見なしたときの連続写像[*2] と Definition 1.5 で定義された連続写像の概念は一致する.
3. 任意の $a \in D$ に対して $\{z \in D : z \not\leq a\}$ はスコット位相における開集合である.
4. 完備順序集合をスコット位相空間として見たとき，T_0 分離公理を満たすが，T_1 分離公理を満たさない[*3].

Exercise 1.8. 1. 完備順序集合 D, E に対して $D \times E$ 上の順序を次のように定義する.

$$(d, e) \leq_{D \times E} (d', e') \iff d \leq_D d' \quad \wedge \quad e \leq_E e'$$

このとき $D \times E$ が完備になることを示せ.

2. 完備順序集合 D, E に対して $[D \to E]$ は D から E への連続写像の集合であるとする．$[D \to E]$ 上に適当な順序を定義し，$[D \to E]$ がその順序に対して完備になることを示せ.
3. **CPO** がカルテジアン閉圏になることを示せ.

2 イデアル完備化

以下で，任意の順序集合 P と $X \subseteq P$ に対して $\downarrow X$ は $\{a \in P : \exists b. b \in X. a \leq b\}$ を表す．$\downarrow \{a\}$ の代わりに $\downarrow a$ と書くこともある.

Definition 2.1 (イデアル)**.** 順序集合 P に対して $X \subseteq P$ が **P 上のイデアル** *ideal over P* であるのは，X が以下の条件を満たす時である：

- $\downarrow X = X$
- $X \subseteq_{dir} P$.

[*1] 集合 X に対して $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ が開集合系であるのは，(i) $\varnothing, X \in U$, (ii) $U, U' \in \Omega \Rightarrow U \cap U' \in \Omega$, (iii) $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \Omega \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \Omega$ が成り立つときである.

[*2] 位相空間 X, X' に対して関数 $f : X \to X'$ が連続であるのは X' の任意の開集合 U に対して $f^{-1}[U]$ が X の開集合であるときである.

[*3] X を位相空間，Ω をその開集合系とする．このとき T_0 および T_1 は次の公理である.
T_0 $\forall x, y. x \neq y \Rightarrow \exists U \in \Omega. (x \in U \wedge y \notin U) \vee (x \notin U \wedge y \in U)$
T_1 $\forall x, y. x \neq y \Rightarrow \exists U \in \Omega. x \in U \wedge y \notin U$

任意の順序集合 P に対して $\mathrm{Ideal}(P)$ は $\{x \subseteq P : x$ は P 上のイデアル $\}$ を表すものとする．また単調写像 $f : P \to Q$ に対して $\mathrm{Ideal}(f) : \mathrm{Ideal}(P) \to \mathrm{Ideal}(Q)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Ideal}(f)(x) = \downarrow f[x]$$

この写像が正しく定義されていることを示す．そのためには $x \in \mathrm{Ideal}(P)$ に対して $\downarrow f[x] \in \mathrm{Ideal}(Q)$ であることを示せば良い．下に閉じていることは自明なので，有向であることを示す．$a, b \in \downarrow f[x]$ とする．このときある $c, d \in x$ が存在して，$a \le f(c), b \le f(d)$．x はイデアルなので，ある $e \in x$ が存在して $c \le e, d \le e$．f の単調整より $f(c) \le f(e), f(d) \le f(e)$．よって $a \le f(e), b \le f(e)$．もちろん $f(e) \in \downarrow f[x]$．よって確かに $\downarrow f[x]$ はイデアルである．

Lemma 2.2. 任意の順序集合 P, Q と単調写像 $f : P \to Q$ に対して，以下が成り立つ．

1. $(\mathrm{Ideal}(P), \subseteq)$ は *CPO* である．
2. $\mathrm{Ideal}(f) : \mathrm{Ideal}(P) \to \mathrm{Ideal}(Q)$ は連続写像である．

Proof. (1) $X \subseteq_{dir} \mathrm{Ideal}(P)$ とする．このとき $x := \cup X$ が $(\mathrm{Ideal}(P), \subseteq)$ における X の上限になっていることを示そう．$\forall z \in X. z \subseteq x$ と $\forall y \in UB(X). x \subseteq y$ は自明なので，x が P 上のイデアルになっていることを示せば良い．$a \in x$，$b \in P$，$a \ge b$ とする．このときある $z \in X$ が存在して $a \in z$．z はイデアルだから $b \in z$．よって $b \in x$．次に $a, b \in x$ とする．このときある $y, y' \in X$ に対して $a \in y, b \in y'$．X は有向だから，ある $z \in X$ が存在して，$y \subseteq z, y' \subseteq z$．従って $a, b \in z$．z はイデアルだから，ある $c \in z$ に対して $a \le c, b \le c$．一方 $z \subseteq x$ より $c \in x$．従って x はイデアルである．

(2) $X \subseteq_{dir} \mathrm{Ideal}(P)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ideal}(f)(\bigvee X) &= \downarrow f[\cup X] \\
&= \downarrow \cup \{f[x] : x \in X\} \\
&= \cup \{\downarrow f[x] : x \in X\} \\
&= \cup \{\mathrm{Ideal}(f)(x) : x \in X\} \\
&= \bigvee \mathrm{Ideal}(f)[X]
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3. Ideal は **Pos** から **CPO** への関手である．

Proof. 任意の単調写像 $f : P \to Q$ に対して $\mathrm{Ideal}(P)$ が CPO，$\mathrm{Ideal}(f)$ が $\mathrm{Ideal}(P)$ から $\mathrm{Ideal}(Q)$ が連続になることは上の補題で示した．

$x \in \mathrm{Ideal}(P)$ とする．このとき $\mathrm{Ideal}(id_P)(x) = \downarrow id_P[x] = id_P[x] = x$．よって $\mathrm{Ideal}(id_P) = id_{\mathrm{Ideal}(P)}$．

$f : P \to Q, g : Q \to R$ を考える．$x \in \mathrm{Ideal}(P)$ とする．このとき $\mathrm{Ideal}(g \circ f)(x) = \downarrow g \circ f[x] = \downarrow g[f[x]]$．$f[x] \subseteq \downarrow f[x]$ であり，g は単調だから，$\downarrow g[f[x]] \subseteq \downarrow g[\downarrow f[x]]$ は明らかである．逆を示す．$a \in \downarrow g[\downarrow f[x]]$ とする．このときある $a \in P, b \in Q$ が存在して $b \le f(a), c \le g(b)$．g は単調だから $g(b) \le g(f(a))$．よって $c \le g(f(a))$．よって $c \in \downarrow g[f[x]]$．従って $\downarrow g[\downarrow f[x]] \subseteq \downarrow g[f[x]]$．従って $\downarrow g[\downarrow f[x]] = \downarrow g[f[x]]$．従って $\mathrm{Ideal}(g \circ f)(x) = \downarrow g[\downarrow f[x]] = \mathrm{Ideal}(g)(\mathrm{Ideal}(f)(x)) = \mathrm{Ideal}(g) \circ \mathrm{Ideal}(f)(x)$．よって $\mathrm{Ideal}(g \circ f) = \mathrm{Ideal}(g) \circ \mathrm{Ideal}(f)$． □

3 イデアル完備化は左随伴である

$U : \mathbf{CPO} \to \mathbf{Pos}$ を $\mathbf{CPO}$ から $\mathbf{Pos}$ への埋め込み関手とする．このとき $\mathrm{Ideal} \dashv U$ が成り立つことを以下で示す．

Lemma 3.1. $x \in \mathrm{Ideal}(P)$ ならば $x = \bigvee\{\downarrow a : a \in x\}$.

Proof. 練習問題とする． □

$\eta_P : P \to \mathrm{Ideal}(P)$ を

$$\eta_P(a) = \downarrow a \quad (a \in P)$$

として定義する．このとき η は自然変換である．すなわち以下のダイアグラムが可換である：

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Ideal}(P) \arrow[d, "\mathrm{Ideal}(f)"] \\
Q \arrow[r, "\eta_Q"'] & \mathrm{Ideal}(Q)
\end{tikzcd}$$

実際，$\mathrm{Ideal}(f) \circ \eta_P(a) = \mathrm{Ideal}(f)(\eta_P(a)) = \mathrm{Ideal}(f)(\downarrow a) = \downarrow f[\downarrow a] = \downarrow f(a) = \eta_Q(f(a)) = \eta_Q \circ f(a)$.

任意の完備順序集合 D と単調写像 $f : P \to UD$ に対して $\tilde{f} : \mathrm{Ideal}(P) \to D$ を次のように定義する：

$$\tilde{f}(x) = \bigvee f[x] \quad (x \in \mathrm{Ideal}(P))$$

$\tilde{f}$ が連続であることを示そう．そのためには任意の $X \subseteq_{dir} \mathrm{Ideal}(P)$ に対して $\tilde{f}(\bigvee X) = \bigvee \tilde{f}[X]$ を示せばよい．$X \subseteq_{dir} \mathrm{Ideal}(P)$ とする．$\tilde{f}(\bigvee X) = \tilde{f}(\cup X) = \bigvee f[\cup X]$．これを d とおこう．一方 $\bigvee \tilde{f}[X] = \bigvee\{\tilde{f}(x) : x \in X\} = \bigvee\{\bigvee f[x] : x \in X\}$．$x \in X$ を考える．$x \subseteq \cup X$ であるから，$f[x] \subseteq f[\cup X]$ が成り立つ．よって $\bigvee f[x] \leq \bigvee f[\cup X]$．よって d は $\tilde{f}[X]$ の上界になっている．最小性を示そう．e は $\tilde{f}[X]$ の上界の一つであるとする．このとき任意の $x \in X$ に対して $\bigvee f[x] \leq e$ である．従って任意の $x \in X, a \in x$ に対して $f(a) \leq e$ である．従って任意の $a \in \cup X$ に対して $f(a) \leq e$ である．よって $\bigvee f[\cup X] \leq e$ である．以上で d が $\tilde{f}[X]$ の最小上界であることが示された．よって $\tilde{f}$ は連続である．

次に $f = U\tilde{f} \circ \eta$ を示す．$a \in P$ とする．$U\tilde{f} \circ \eta(a) = \tilde{f}[\downarrow a] = \bigvee f[\downarrow a]$．$a$ は $\downarrow a$ の最大元なので $f(a)$ は $f[\downarrow a]$ の最大元．よって $f(a) = \bigvee f[\downarrow a]$.

最後に $\tilde{f}$ の一意性を示す．$g : \mathrm{Ideal}(P) \to D$ は連続，$f = Ug \circ \eta$ とする．$x \in \mathrm{Ideal}(P)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(\bigvee\{\downarrow a : a \in x\}) \quad (\because \text{Lemma 3.1}) \\
&= \bigvee g[\{\downarrow a : a \in x\}] \\
&= \bigvee\{g(\downarrow a) : a \in x\} \\
&= \bigvee\{g(\eta(a)) : a \in x\} \\
&= \bigvee\{Ug \circ \eta(a) : a \in x\} \\
&= \bigvee\{f(a) : a \in x\} \\
&= \bigvee f[x] \\
&= \tilde{f}(x)
\end{aligned}$$

以上で $\mathrm{Ideal} \dashv U$ が成り立つことが示された．

Exercise 3.2. Lemma 3.1 を証明せよ．

Exercise 3.3. D は CPO であるとする．$a \in D$ に対して，a が**コンパクト**あるいは**有限**であるのは，任意の $X \subseteq_{dir} D$ に対して $\bigvee X \leq a$ ならばある $b \in X$ が存在して $b \leq a$ が成り立つときである．D におけるコンパクトな要素の全体を $\mathcal{K}(D)$ によって表す．また任意の $a \in D$ に対して $approx(a) = \downarrow a \cap \mathcal{K}(D)$ とする．任意の $a \in D$ に対して $approx(a)$ が有向であり，$a = \bigvee approx(a)$ が成り立つとき，D は**代数的**であるという．このとき以下を示せ．

1. N は自然数の集合とする．$(\mathcal{P}(N), \subseteq)$ におけるコンパクトな要素が N の有限部分集合に一致することを示せ．また $\mathcal{P}(N)$ が代数的であることを示せ．
2. Exmaple 1.3 の CPO におけるコンパクトな要素を特徴づけよ．
3. 任意の順序集合 P に対して $\mathrm{Ideal}(P)$ が代数的であることを示せ（ヒント：Lemma 3.1 を使う）．

参考文献

[1] R. M. Amadio and P.-L. Curien. *Domains and Lambda-Calculi*, Vol. 46 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2008.

[2] S. Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, New York, 2006.

[3] 高橋正子. 計算論――計算可能性とラムダ計算, コンピュータサイエンス大学講座, 第 24 巻. 近代科学社, 2003.